Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 8

Abgabe: Montag, den 17. Juni 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 8.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 14.10: Zeigen Sie die n-Linearität des Funktionals

$$\begin{aligned} \delta\colon \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n\text{-mal}} &\to K \\ (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} &\mapsto \sum_{\pi\in S_n} Sign(\pi) a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}. \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie für $B \in M_{n\times n}(K)$ das Funktional

$$\begin{aligned} \delta_B\colon \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n\text{-mal}} &\to K \\ (z_1, \ldots, z_n) &\mapsto \det\begin{pmatrix} z_1 B \\ \hline \vdots \\ \hline z_n B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 15.5: Zeigen Sie, dass δ_B n-linear und alternierend ist.

Aufgabe 8.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{O}$ die $(n\times n)$-Nullmatrix. Zeigen Sie, dass genau dann $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathcal{O}\end{array}\right) = 0$ für alle $A \in M_{m\times m}(K)$, $B \in M_{m\times n}(K)$, $C \in M_{n\times m}(K)$ gilt, wenn $n > m$ erfüllt ist.

Aufgabe 8.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und A, $B \in M_{2\times 2}(K)$. Bestimmen Sie zwei Matrizen $C, D \in M_{2\times 2}(K)$ derart, dass $\det(A + B) - (\det(A) + \det(B)) = \det(C) + \det(D)$.

Aufgabe 8.4 (*4 Punkte*)

(a) Sei K ein Körper, $a, b, c, d, e \in K^{4\times 1}$ und $A := (a|b|c|d), B := (a| - e|c|b), C := (a|d|c|e) \in M_{4\times 4}(K)$ sodass $\det(A) = 3$, $\det(B) = -2$ und $\det(C) = 5$. Berechnen Sie die Determinante von $A + B$.

(b) Bestimmen Sie die nachfolgende Determinante über $\mathbb{F}_5$ und $\mathbb{F}_{11}$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgabe für Interessierte. (*4 Bonuspunkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ sodass die Determinante jeder Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit nur Einträgen 2 oder -2 durch 2^m über $\mathbb{Z}$ teilbar ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.